

NIERÓWNOŚĆ MUIRHEAD'A

Jeżeli ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ majoryzuje ciąg nieujemnych liczb $(b_1, \dots, b_n)$, zaś liczby $x_1, \dots, x_n$ są nieujemne, to

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n} \quad (*)$$

Często używana jest notacja skrótowa np.

$$T(a_1, \dots, a_n) := \sum_{\text{sym}} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \text{ lub } [a_1, \dots, a_n] := 1/n! * \sum_{\text{sym}} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$$

Zad. Ile wyrazów ma suma $\sum_{\text{sym}} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$?

Zad. Wykaż nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną korzystając z nierówności Muirhead'a.

Zad. Niech $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ będą ciągami nieujemnych liczb. Wykaż, że jeżeli nierówność $(*)$ zachodzi dla dowolnych $x_1, \dots, x_n$, to $(a_1, \dots, a_n)$ majoryzuje $(b_1, \dots, b_n)$.

Zad. Wykaż nierówność Muirhead'a. Możesz to zrobić w następujących etapach:

(a) wykaż, że jeżeli $a < b < c$ oraz $x, y > 0$, to

$$x^{c+b} y^{c-b} + x^{c-b} y^{c+b} \geq x^{c+a} y^{c-a} + x^{c-a} y^{c+a}$$

(b) Wykaż, że jeżeli $(a_1, \dots, a_n)$ majoryzuje $(b_1, \dots, b_n)$, to ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ można otrzymać z ciągu $(b_1, \dots, b_n)$ przez zastosowanie skończonego wiele razy operacji:
 $(\dots, c + a, \dots, c - a, \dots) \rightarrow (\dots, c + b, \dots, c - b, \dots)$

Zad.

If a, b, c are non-negative real numbers, prove that

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq \frac{1}{7}(a + b + c)^3.$$

Zad.

Let a, b, c be positive numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Zad.

Exercise 1.117. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Zad.

Exercise 1.116. (IMO, 1961) Let a, b, c be the lengths of the sides of a triangle, and let (ABC) denote its area. Prove that

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Zad.

Example 1.8.8. If a, b, c are non-negative real numbers, prove that

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$