

Def. Figura jest wypukła, jeżeli dowolny odcinek o końcach na jej brzegu jest zawarty w jej wnętrzu.

Def. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, jeżeli dla dowolnych x, y należących do dziedziny oraz dowolnego $t \in [0, 1]$ mamy:

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

Zad. Dlaczego wypukłość funkcji jest równoważna z wypukłością jej wykresu?

Fakt Jeżeli f ma drugą pochodną, to jest ona wypukła wtw. gdy $0 \leq f''(x)$ dla każdego x .

Zad. (**nierówność Jensena**) Załóżmy, że funkcja f jest wypukła. Wykaż, że jeżeli funkcja f jest wypukła, to dla dowolnych $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ takich, że $t_1 + \dots + t_n = 1$ oraz dla dowolnych argumentów $x_1, \dots, x_n$ mamy:

$$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n)$$

Zad. Załóżmy, że f jest wypukła.

(a) Wykaż, że dla dowolnych x, h mamy $f(x+2h) + f(x) \geq 2 f(x+h)$

(b) Korzystając z (a), wykaż, że jeżeli f ma drugą pochodną, to $0 \leq f''(x)$ dla każdego x .

zad. Wykaż nierówność między średnimi – arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Wskazówka: zlogarytmuj obustronnie.

Exercise 1.87. (Power mean inequality) Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be positive real numbers and let $t_1, t_2, \dots, t_n$ be positive real numbers adding up to 1. Let r and s be two nonzero real numbers such that $r > s$. Prove that

$$(t_1 x_1^r + \dots + t_n x_n^r)^{\frac{1}{r}} \geq (t_1 x_1^s + \dots + t_n x_n^s)^{\frac{1}{s}}$$

with equality if and only if $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Wskazówka: kiedy funkcja $f(x) = x^a$ jest wypukła?

zad.

In an acute triangle with angles A, B and C , show that

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$$

Wsk. Najpierw użyj nierówności między średnimi.

Zad.

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$.

Wskazówka: bez straty ogólności $a+b+c = 1$. Użyj Jensena dla $f(x) = 1/\sqrt{x}$.

Exercise 1.85. If a, b, c are positive real numbers, prove that

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Wskazówka: bez straty ogólności $a+b+c = 1$. Co zrobić, aby każdy ze składników po lewej zawierał tylko jedną zmienną?

zad. (Nierówność Holdera)

Wykaż, że jeżeli $1/p + 1/q = 1$, to:

$$\sum_{k=1}^n |a_k| |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Wskazówka: podnieś obie strony do potęgi pq . Następnie podziel przez $(\sum |a_k|^p)^q$. Skorzystaj z wypukłości funkcji $f(x) = x^q$.

439. Show that if A, B, C are the angles of a triangle, then

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

440. Let $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, be nonnegative numbers with $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, and let $0 < x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$. Prove that

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+x_i} \leq \frac{1}{1+x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}.$$

Wskazówka: podstaw $y_i := \ln x_i$.