

Example 4.1.2. Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be real numbers lying in $(1/2, 1]$. Prove that

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n} \geq \frac{(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)}{(n - a_1 - a_2 - \dots - a_n)^n}.$$

Wskazówka: zlogarytmuj nierówność i odpowiednio pogrupuj składniki.

442. Let $0 < x_i < \pi, i = 1, 2, \dots, n$, and set $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Prove that

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{\sin x_i}{x_i} \right) \leq \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n.$$

443. Let $n > 1$ and $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ be such that $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Prove that

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n - 1}}.$$

Wskazówka: po zastosowaniu Jensena, użyj nierówności między średnimi.

Example 4.2.1. Let $a, b, c > 0$. Prove that

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^{a+b+c}.$$

Example 2.3 (Shortlist 2009)

Given $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, prove that

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(a + 2b + c)^2} + \frac{1}{(a + b + 2c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

Wskazówka: „ujednorodnij” nierówność (tak, aby prawa strona była jednorodna), a następnie zamień warunek na prostszy.

6. Let a, b, c be three positive numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prove that

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)^5} + \frac{1}{b^3(c+a)^5} + \frac{1}{c^3(a+b)^5} \right)^{1/5} \geq \frac{3}{2}$$

Hint: prove first the Nesbitt inequality, using AM-HM inequality:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$