# Koło „z gwiazdką”
# ALGEBRA LINIOWA

Powtórka:

- $rk(A) := \#$ liniowo niezależnych kolumn $= \#$ liniowo niezależnych wierszy $= \dim im(A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m) =$ największy stopniem niezerowy minor dla $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$,

  $nullity(A) := \dim \ker A$

  Twierdzenie (rank–nullity theorem) $rk(A) + nullity(A) = n$ dla $A \in M_n(\mathbb{R})$
- wyznaczniki:
  - $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
  - $A^{-1}$ – istnieje wtw $\det A \neq 0$,
  - wyznacznik macierzy górnotrójkątnej to iloczyn eltów na przekątnej,
- ślad

  $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
- wartości i wektory własne: $Av = \lambda \cdot v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$,
  - wartości własne są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego: $P_A(x) := \det(xI_n - A)$,

    twierdzenie Cayleya–Hamiltona: $P_A(A) = 0$,

    $\det A = \prod_i \lambda_i$, $\mathrm{tr}\, A = \sum_i \lambda_i$,
  - krotność arytmetyczna $\lambda$: krotność jako pierwiastka $P(x)$,

    krotność geometryczna $\lambda$: $\dim \ker(A - \lambda I)$

    Fakt: krotność geometryczna $\lambda \leqslant$ krotność arytmetyczna $\lambda$.
  - $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – wartości własne $A \in M_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)$ – wartości własne $P(A)$.
- diagonalizacja: $A = PDP^{-1}$, $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $P = [v_1| \ldots |v_n]$
  - Twierdzenie: $A$ – diagonalizowalna wtw. krotność ar. = krotność geo. dla wszystykich wartości własnych wtw. gdy mamy $n$ liniowo niezależnych wektorów własnych
  - Fakt: wektory własne dla różnych wartości własnych są liniowo niezależne

    Wniosek: jeżeli $A$ ma $n$ różnych wartości własnych, to jest diagonalizowalna.
  - Fakt: Jeżeli $A, B$ są diagonalizowalne oraz $AB = BA$, to $A$ i $B$ są jednocześnie diagonalizowalne.
  - Fakt: $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna wtw. gdy jest ortogonalnie diagonalizowalna ($A = PDP^{-1}$, $PP^T = I_n$) oraz $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

    $A \in M_n(\mathbb{C})$ jest normalna ($AA^\dagger = A^\dagger A$) wtw. gdy jest unitarnie diagonalizowalna ($PP^\dagger = I_n$) oraz $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- forma kwadratowa stowarzyszona z macierzą symetryczną: $f_A(v) := v^T Av$
  - macierz dodatnio określona: $f_A(v) > 0$ dla $v \neq 0$ (równoważnie: dodatnie wartości własne),

    Twierdzenie (kryterium Sylvestera): $A$ – dodatnio określona wtw. gdy $\det A_1, \det A_2, \ldots, \det A_n > 0$.
  - dla dowolnej $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^T$ istnieje $B \in M_n(\mathbb{R})$ oraz $C = diag(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ takie, że $A = BCB^T$.

    sygnatura $A$: liczba jedynek $-$ liczba minus jedynek.
- postać Jordana,
- postać normalna Smitha.

---

1. Dwadzieścia trzy osoby decydują się grać w piłkę nożną, dzieląc się na dwie drużyny po 11 osób każda, plus sędzia. Aby zachować uczciwość, wybrane drużyny muszą mieć równą całkowitą wagę. Okazuje się, że niezależnie od tego, kto zostanie wybrany na sędziego, zawsze można to zrobić. Udowodnij, że 23 osoby mają taką samą wagę w przypadku, gdy:

   (a) ich wagi są całkowite,

   (b) ich wagi są wymierne,

   (c) ich wagi są rzeczywiste.

2. (a) Wykaż, że macierz hermitowska ma rzeczywiste wartości własne.

   (b) Wykaż, że macierz antyhermitowska ($A^\dagger = -A$) ma tylko urojone wartości własne.

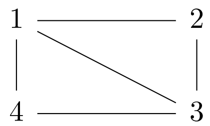
3. Wykaż, że jeżeli $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$, $A = B + J$, gdzie $J = [1]_{1 \leqslant i,j \leqslant 10}$ oraz $A^3 = 0$, to $\det A = 0$. (Jarnik 2013).

4. Wykaż, że jeśli $A \in M_n(\mathbb{R})$ to $\mathrm{tr}(A^T A) \geqslant 0$. Kiedy zachodzi równość?

5. Macierz incydencji grafu $G$ mającego wierzchołki $1, \ldots, n$ to:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & G \text{ zawiera krawędź między } i \text{ oraz } j, \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

   (a) Wyznacz macierz incydencji $A$ dla grafu:




   (b) Oblicz $A^2$ oraz $A^3$.

   (c) *Niech G będzie dowolnym grafem, zaś A jego macierzą incydencji. Wyraz $(i, j)$ w macierzy $A^d$ odpowiada liczbie ścieżek długości $d$ między wierzchołkami $i$ oraz $j$.* – Sprawdź, że to stwierdzenie zachodzi dla grafu z podpunktu (a) oraz $d \in \{2, 3\}$, a następnie zastanów się jak je wykazać (najlepiej indukcyjnie).

   *Wskazówka: jeżeli $A^d = [a_{ij}^{(d)}]_{i,j} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, to jak zinterpretować liczbę $a_{i1}^{(d)} a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(d)} a_{2j}^{(1)} + \ldots + a_{in}^{(d)} a_{nj}^{(1)}$?*

6. (a) Przeczytaj, czym jest ciąg Fibonacciego i oblicz kilka pierwszych wyrazów.

   (b) Wykaż, że $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wywnioskuj, że $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Wykaż, że $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$. Wywnioskuj, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, korzystając z własności wyznacznika.

   (d) Znajdź diagonalizację macierzy $A$.

   (e) Jak z podpunktów (b) oraz (d) znaleźć wzór jawny na $F_n$?

7. Ciągi $a_n$, $b_n$ zadane są przez warunki początkowe $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ oraz

$$\begin{cases} a_{n+1} = -5a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 6b_n - 9a_n \end{cases}.$$

   (a) Oblicz $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$.

   (b) Znajdź macierz $A \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$ taką, że $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$.

   (c) Znajdź diagonalizację macierzy $A$. Korzystając z tego, znajdź wzór jawny ciągów $a_n$, $b_n$.

8. Załóżmy, że:

   - Prawdopodobieństwo, że po dniu deszczowym nastąpi dzień deszczowy wynosi $\frac{1}{4}$.
   - Prawdopodobieństwo, że po dniu słonecznym nastąpi dzień słoneczny wynosi $\frac{1}{3}$.

   Niech

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

   (a) Oznaczmy przez $p_n$ prawdopodobieństwo, że za $n$ dni będzie padało, zakładając że dzisiaj jest dzień deszczowy. Podobnie oznaczmy przez $q_n$ prawdopodobieństwo, że za $n$ dni będzie słonecznie, zakładając że dzisiaj jest słonecznie. Wykaż, że

$$A^n = \begin{bmatrix} p_n & 1 - q_n \\ 1 - p_n & q_n \end{bmatrix}$$

(*Wskazówka: jeżeli masz z tym problem, spróbuj najpierw policzyć* $p_2$, $q_2$, $p_3$, $q_3$ *itd*)

(b) Znajdź diagonalizację macierzy $A$.

*Wskazówka:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Wykaż, że średnio $8/17$ dni jest deszczowe, zaś $9/17$ – słoneczne.

(*Wskazówka: oblicz* $\lim_{n\to\infty} A^n$, *korzystając z diagonalizacji* $A$.)

(d) Jak zinterpretować fakt, że $\begin{bmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{9}{17} \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym dla $A$?

9. (a) Wykaż, że jeżeli $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, to $rk(AB) \leqslant \max(rk(A), rk(B))$.

   (b) Wykaż, że $nullity(AB) \leqslant nullity(A) + nullity(B)$ dla $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

10. Oblicz wyznacznik macierzy $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

11. Znajdź wielomian charakterystyczny macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

12. Wykaż, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{R})$ oraz $A^k = 0_n$, to $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \ldots + A^{k-1}$.

13. Niech $P \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem. Wykaż, że jeżeli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, to $P(\lambda)$ jest wartością własną macierzy $P(A)$.

    (*Uwaga: jeżeli* $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, *to* $P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$)

14. Znajdź wszystkie wektory własne dla operatora $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ dla dowolnej wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$. ($C^\infty(\mathbb{R})$ oznacza tu zbiór funkcji, które mają wszystkie pochodne ciągłe)

15. Wykaż, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^m = I_n$ dla pewnego $m$, to $A$ jest diagonalizowalna.

16. Wykaż, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{Z}/p)$ jest diagonalizowalna i ma wszystkie wartości własne w $\mathbb{Z}/p$, to $A^p = A$.

17. Wykaż, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^TA = I_n$, to wszystkie wartości własne $A$ mają moduł $1$.

    (*Wskazówka: domnóż* $A^TA = I_n$ *z lewej i prawej strony przez wektor własny*)

18. Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy $A$.

    (a) Wykaż, że $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

    (*Jeżeli nie masz innego pomysłu, możesz założyć że* $A$ *jest diagonalizowalna.* )

    (b) Wykaż, że $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

    ($\operatorname{tr} A$ *to ślad macierzy, czyli suma wartości na przekątnej. Jeżeli nie masz innego pomysłu, możesz założyć że* $A$ *jest diagonalizowalna i skorzystać ze wzoru* $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$)

19. (a) Niech $T : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Wykaż, że $T^2 = T$ wtedy i tylko wtedy $T$ jest rzutowaniem $V$ na $im(T)$ wzdłuż $ker(T)$.

    (jeżeli $V = W_1 \oplus W_2$, to rzutowanie na $W_1$ wzdłuż $W_2$ to przekształcenie $\pi(w_1 + w_2) = w_1$)

    (b) Niech $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem liniowym. Wykaż, że $A$ jest rzutem ortogonalnym na $im(T)$ wtw gdy $A^2 = A$ oraz $A^T = A$.

    (wskazówka: wykaż, że $\langle (I - A)v, Av \rangle = 0$ dla dowolnego $v$. Jak wyrazić iloczyn skalarny za pomocą mnożenia macierzy?)